

Chapter 13 : Manyetik Bağlaşımlı Devreler

13.2 Karşılıklı Endüktans (Mutual Inductance) ^{→ Coupling Inductance}

1. İki bobin yakın olduğunda, bir bobin tarafından sebep olunan manyetik akı (flux), diğer bobin ile etkileşim oluşturur.
2. Bobinler geçen akım etrafında bir manyetik akı oluşturur (Weber / Volt-sın)
3. Bobin etrafındaki gerilim, sarım sayısı ve manyetik akıdaki değişim ile doğru orantılı.

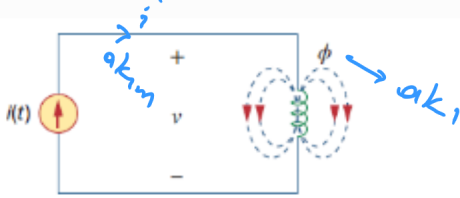


Figure 13.1
Magnetic flux produced by a single coil with N turns.

Öz Endüktans (H) (Self inductance)

Tek bir bobin : Gerilim manyetik akıya, manyetik akı da elektrik akıma bağlı (Faraday)

$$v = N \frac{d\phi}{dt} = N \underbrace{\frac{d\phi}{di}}_{L} \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Karşılıklı (mutual) endüktans (H)

Bir bobinin komşu bobinde gerilim yaratma yetisidir ve birimi Henry (H)'dir.

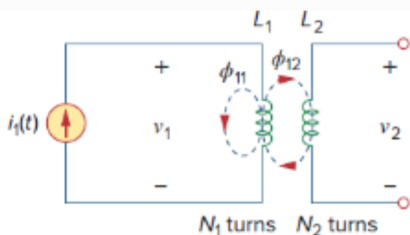
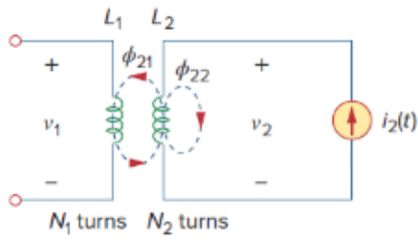


Figure 13.2
Mutual inductance M_{21} of coil 2 with respect to coil 1.

1. $\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$ (iki bileşen var)
2. $v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}$
3. $v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$
($M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}$)

4. Karşılıklı enduktans: M_{21} : Birinci sarımdaki akımın ikinci sarımda gerilim yaratma yeteneği



Mutual inductance M_{12} of coil 1 with respect to coil 2.

$$1) \phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$$

$$c) v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$3) v_1 = M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

4) $M_{21} = M_{12}$

Önemli : Karşılıklı yaratılan gerilim + veya - olabilir. Sarım yönleri ile ilgilidir. (Sağ el kuralı)

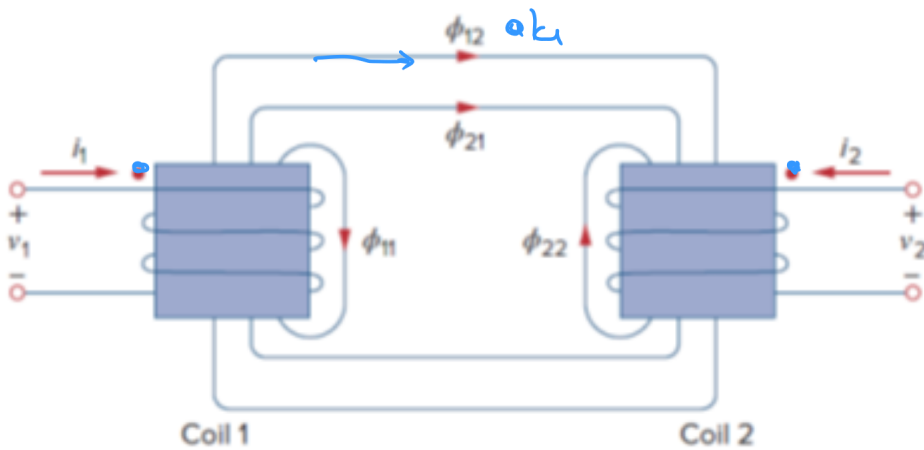


Illustration of the dot convention.

↓
baş parmak
 ϕ 'nin yönünü
gösterir.

- 1) Bir tarafta akım noktalı taraftan giriyorsa,
diğer noktalı tarafta pozitif gerilim oluşur.
- 2) " " " " " " çıkıyorsa
negatif gerilim oluşur.

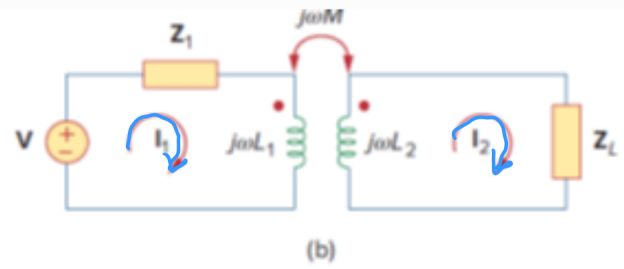
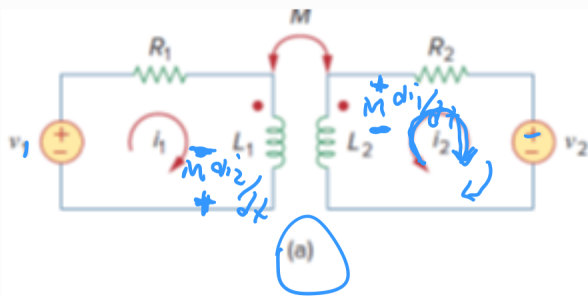


Figure 13.7

Time-domain analysis of a circuit containing coupled coils (a) and frequency-domain analysis of a circuit containing coupled coils (b).

Gerne akım yöntemi daha çok tercih edilir.
Gerne akımlarını istediğimiz yönde tanımlayabiliriz.
(saat yönü olsun)

zaman alanı:

$$-v_1 + i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$+v_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + i_2 R_2 = 0$$

fazör alanı

$$-\bar{V}_1 + \bar{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \bar{I}_1 - j\omega M \bar{I}_2 = 0$$

$$+\bar{V}_2 + j\omega L_2 \bar{I}_2 - j\omega M \bar{I}_1 + \bar{I}_2 R_2 = 0$$

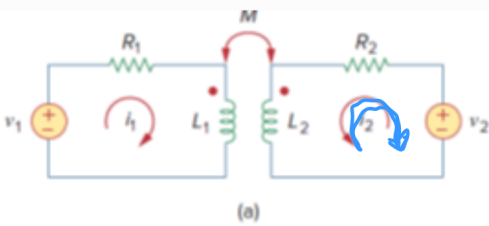


Figure 13.7

Time-domain analysis of a circuit containing coupled coils (a) and frequency-domain analysis of a circuit containing coupled coils (b).

bu sefer
2. tarafta
gerilim kaynağı
yok.

$$-\bar{V} + Z_1 \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_1 - j\omega M \bar{I}_2 = 0$$

$$Z_L \bar{I}_2 + j\omega L_2 \bar{I}_2 - j\omega M \bar{I}_1 = 0$$

Practice Problem 13.1

Determine the voltage $\mathbf{V}_o$ in the circuit of Fig. 13.10.

$$\begin{array}{c} \text{M} \\ \curvearrowright \\ j\omega M \\ \curvearrowleft \end{array}$$

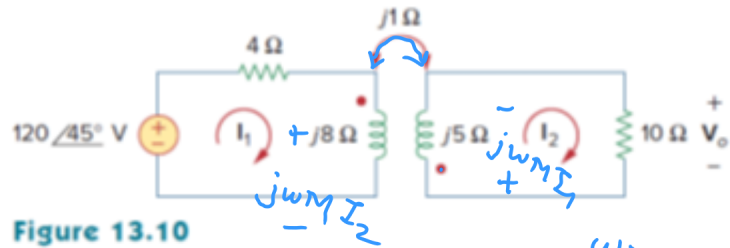


Figure 13.10
For Practice Prob. 13.1.

Answer: $12\angle-45^\circ \text{ V}$.

$$\textcircled{1} \quad -120\angle 45^\circ + 4I_1 + j8I_1 + j1I_2 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 10I_2 + j5I_2 + j1I_1 = 0$$

$$-jI_1 = (10 + j5)I_2$$

$$\boxed{I_1 = (-5 + j10)I_2}$$

$$\textcircled{1} \quad 120\angle 45^\circ = (4 + j8)(-5 + j10)I_2 + jI_2$$

$$= \bar{I}_2 [-20 + j40 - j40 - 80 + j]$$

$$120\angle 45^\circ = \bar{I}_2 (-100 + j)$$

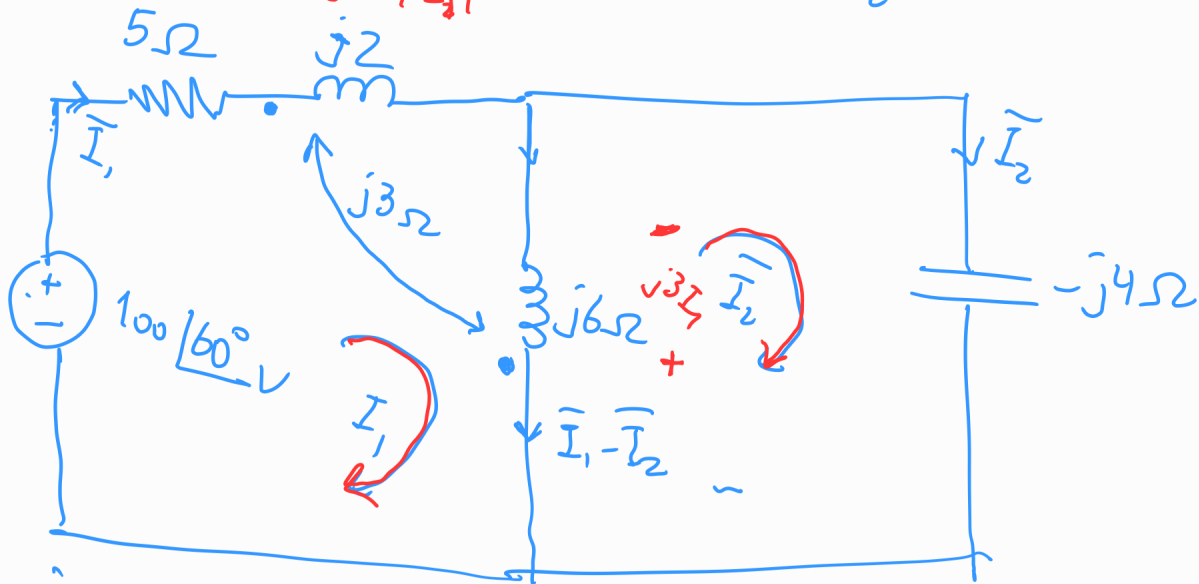
$$\bar{I}_2 \approx \frac{120\angle 45^\circ}{100} = 1.2\angle 45^\circ$$

$$\bar{V}_o = 10\bar{I}_2 = 12\angle 45^\circ \text{ V}$$

Problem 13.2
 $-j3(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) +$

$\bar{I}_1 = ?$

$\bar{I}_2 = ?$



İki bobin arasında hem manyetik bağlaşım, hem de fiziksel (elektiriksel) bağlantı olabilir.

$$(1) -100\angle 60^\circ + 5\bar{I}_1 + j2\bar{I}_1 - j3(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) + j6(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) - j3\bar{I}_1 = 0$$

$$(2) -j4\bar{I}_2 + j6(\bar{I}_2 - \bar{I}_1) + j3\bar{I}_1 = 0$$

$$(-j4 + j6)\bar{I}_2 - j6\bar{I}_1 + j3\bar{I}_1 = 0$$

$$j2\bar{I}_2 = j3\bar{I}_1$$

$$\bar{I}_2 = \frac{3}{2}\bar{I}_1$$

$$(1) 100\angle 60^\circ = \bar{I}_1(5 + j2 - j3 + j6 - j3) + \bar{I}_2(+j3 - j6)$$

$$= \bar{I}_1(5 + j2) + \bar{I}_2(-j3)$$

$$100\angle 60^\circ = \bar{I}_1\left(5 + j2 - \frac{j9}{2}\right)$$

$$100\angle 60^\circ = \bar{I}_1(5 - j2.5)$$

$$\bar{I}_1 = \frac{100\angle 60^\circ}{5 - j2.5} = 17.889\angle 86.6^\circ \text{ A}$$

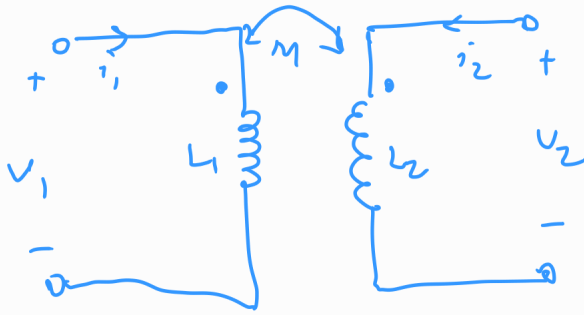
$$\bar{I}_2 = \frac{3}{2} \bar{I}_1 = 26,83 \angle 86,6^\circ \text{ A}$$

13.3 Bağımsızlı Devrelerde Enerji

ELE 201 : bir endüktörde depolanan enerji

$$w = \frac{1}{2} L i^2$$

Manyetik bağımsızlı devre:



ilk başta akımlar sıfır olsun.
 $i_1 = 0$ 'dan I_1 'e yükseltildiğinde

$$p_1(t) = v_1 i_1 = i_1 L \frac{di_1}{dt}$$

$$w_1 = L_1 \int_0^{I_1} i_1 \frac{di_1}{dt} dt = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Şimdi de i_2 'yi I_2 'ye yükseltelim. Bu durumda birinci bobinde bağımsızlı gerilim de oluşur.

$$p_2(t) = i_1 \frac{M_{12} di_2}{dt} + i_2 v_2 = I_1 \frac{M_{12} di_2}{dt} + i_2 L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$w_2 = M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Toplam depolanan enerji

$$w = w_1 + w_2 = M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Diğer şekilde (önce i_2 sonra i_1 artırılrsa)

$$w = M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \geq 0 \text{ ikisi aynı, yani}$$

$$M_{12} = M_{21}$$

Noktalar ters olsaydı, negatif gerilim indüklenecekti-

$$0 \text{ zaman } w = w_1 + w_2 = -M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \geq 0$$

enerji hep sıfırdan büyük olmak zorunda

$$-M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \sqrt{L_1 L_2} I_1 I_2 - \sqrt{L_1 L_2} I_1 I_2 \geq 0$$

$$-M I_1 I_2 + \frac{1}{2} \left(I_1 \sqrt{L_1} - I_2 \sqrt{L_2} \right)^2 + \sqrt{L_1 L_2} I_1 I_2 \geq 0$$

negatif olmaz

tom kore dışındaki terimlerin toplamının da pozitif olması için

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \text{ olmalıdır. (üst limit)}$$

M 'nin bu limite yaklaşma derecesi k parametresi ile belirlenir

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

$0 \leq k \leq 1$ k 'nin değeri bobinlerin yakınlığına, ve çekirdeğin hammaddesine bağlı.

$k \approx 1$: Tightly coupled

$k < 1$: Loosely coupled.

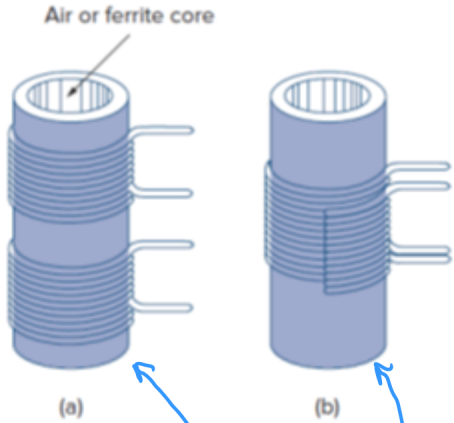


Figure 13.15
Windings: (a) loosely coupled, (b) tightly coupled; cutaway view demonstrates both windings.

Hava çekirdekli olanlar : düşük k ,
gevşek bağlanımlı.
(radyo, Tv devreleri)

Demir çekirdekli olanlar : $k \approx 1$
ideal trafolar.

For the circuit in Fig. 13.18, determine the coupling coefficient and the energy stored in the coupled inductors at $t = 1.5$ s.

Practice Problem 13.3

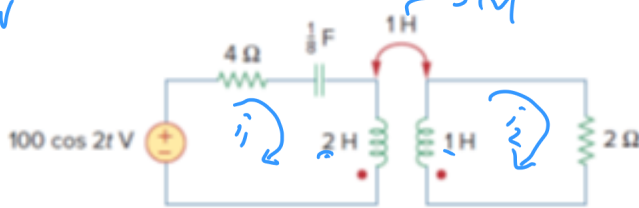
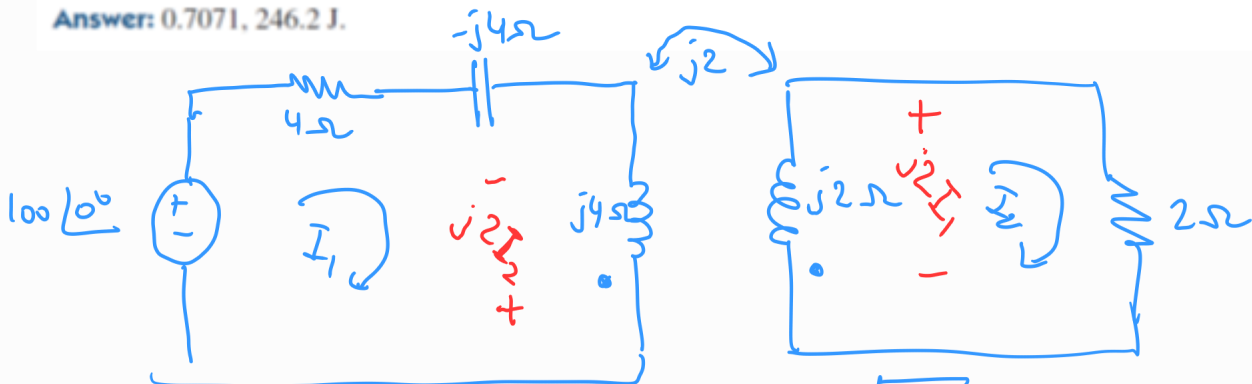


Figure 13.18
For Practice Prob. 13.3.

$$\omega = 2 \text{ rad/s}$$

$t = 1.5$ sn'deki akım değerleri bulunmalı.

Answer: 0.7071, 246.2 J.



$$M = 1 \text{ H}$$

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \Rightarrow 1 = k \sqrt{2 \cdot 1} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ gevşek bağlanımlı}$$

$$\frac{-j}{2 \cdot \frac{1}{8}} = -j4 \Omega$$

$$(1) -100 + 4I_1 - j4I_1 + j4I_1 - j2I_2 = 0$$

$$(2) 2I_2 + j2I_2 - j2I_1 = 0 \Rightarrow j2I_1 = (2+j2)I_2$$

$$\frac{j2I_1}{-j} = \frac{(2+j2)I_2}{-j}$$

$$I_1 = (1-j)I_2$$

$$(1) 100 = I_1(4 - j4 + j4) - j2I_2$$

$$= I_2 4(1-j) - j2I_2 = I_2[4 - 4j - j2] = (4-j6)I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{100}{4-j6} = 13.87 \angle 56.3^\circ \Rightarrow i_2(t) = 13.87 \cos(2t + 56.3^\circ)$$

$$I_1 = \frac{100(1-j)}{4-j6} = 13.87 \angle 56.3^\circ \cdot \sqrt{2} \angle -45^\circ$$

$$= 19.61 \angle 11.3^\circ \Rightarrow i_1(t) = 19.61 \cos(2t + 11.3^\circ)$$

$t = 1.5 \text{ sn'de:}$

$$i_2(1.5) = -9.25$$

$$i_1(1.5) = -19.58$$

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 19.58^2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 9.25^2 - 1 \times 9.25 \times 19.58 = 245 \text{ J}$$

13.4 Doğrusal Trafolar:

- Radyo, TV'lerde kullanılır.

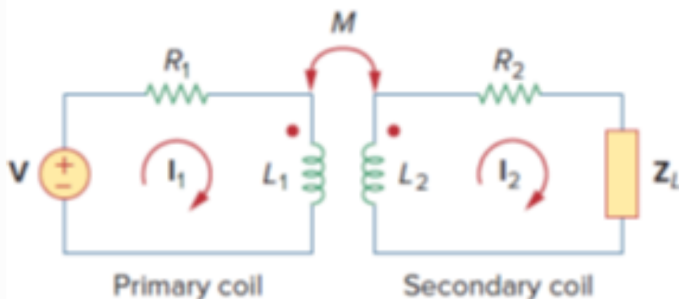


Figure 13.19
A linear transformer.

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

$\rightarrow$ kısık. $\rightarrow$ Serim sayılar.